Analisis Aliran di dalam Pipa

Analisis aliran di dalam pipa untuk fluida Newtonian tak mampu mampat (*incompressible*) dilakukan dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V} = \frac{-\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \nu\nabla^2\vec{V} \qquad \text{........(1)}$$

$$\nabla.\vec{V} = 0$$

Untuk kondisi *steady state* maka perubahan kecepatan terhadap waktu sama dengan nol sehingga,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad \text{dan} \quad \vec{g} = -g\vec{k}$$

Maka persamaan (1) menjadi,

$$\frac{\nabla p}{\rho} + g\vec{k} = \nu\nabla^2\vec{V} \qquad \text{........(2)}$$

Pada aliran berkembang penuh, komponen hanya pada arah aksial sehingga konponen kecepatan menjadi $\vec{V} = u(r)\vec{i}$

Dari pembahasan mekanika fluida I didapatkan persamaan gerakan fluida, untuk tiga sumbu kordinat kartesian diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\delta F_x = \delta m a_x$$

$$\delta F_y = \delta m a_y$$

$$\delta F_z = \delta m a_z$$

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\delta x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\delta y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\delta z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\delta u}{\partial x} + v\frac{\delta u}{\partial y} + w\frac{\delta u}{\partial z}\right) \qquad \text{……..(3)}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\delta x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\delta y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\delta z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\delta v}{\partial x} + v\frac{\delta v}{\partial y} + w\frac{\delta v}{\partial z}\right) \qquad \text{……..(4)}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\delta x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\delta y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\delta z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\delta w}{\partial x} + v\frac{\delta w}{\partial y} + w\frac{\delta w}{\partial z}\right) \qquad \text{……..(5)}$$

Tegangan pada persamaan (3,4,5) dinyatakan dalam bentuk medan kecepatan dan tegangan, sehingga untuk koordinat kartesian tegangan dinyatakan dengan persamaan (6) sampai dengan persamaan (11).

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{........(6)}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{........(7)}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \text{........(8)}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \text{........(9)}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \text{.......(10)}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \text{.......(11)}$$

Untuk aliran fluida *incompressible* dengan kondisi viskositas konstan, persamaan Navier-Stoke dapat ditulis menjadi:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{.......(12)}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{.......(13)}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \text{.......(14)}$$

Secara sederhana persamaan Navier-Stoke pada kondisi *steady state* dapat dituliskan dalam bentuk,

$$\nabla.\vec{V}=0$$

$$\nabla p+\rho g\vec{k}=\mu\nabla^2\vec{V} \quad \text{.......(15)}$$

Penurunan Tekanan

Aliran fluida viskos *incompressible* mengakibatkan penurunan tekanan pada aliran. Penurunan tekanan (Δp) pada pipa horizontal merupakan fungsi dari kecepatan rata-rata (V), panjang pipa (l), diamater pipa (D) dan viskositas (μ) dan dinyatakan dengan menggunakan persamaan (16)

$$\Delta p = F(V, l, D, \mu) \qquad \text{…....(16)}$$

$$\frac{D\Delta p}{\mu V} = \phi\left(\frac{l}{D}\right)$$

$$\frac{D\Delta p}{\mu V} = \frac{Cl}{D}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{C\mu V}{D^2} \qquad \text{…....(17)}$$

$$V = \frac{\Delta p D^2}{C\mu l}$$

$$Q = AV = \frac{\pi}{4}\frac{\Delta p D^4}{C\mu l} \qquad \text{…....(18)}$$

C = konstanta

Untuk pipa bulat dimana diketahui konstan C = 32 , maka persamaan (17) menjadi,

$$\Delta p = \frac{32\mu l V}{D^2} \qquad \text{…....(19)}$$

$$V_{avg} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l} \qquad \text{…....(20)}$$

Untuk pipa bulat

$$\Delta p = \frac{32\mu l V}{D^2}$$

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{32\mu l V / D^2}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 64 \frac{\mu}{\rho V D} \frac{l}{D} = \frac{64}{Re} \frac{l}{D}$$

Penurunan tekanan dicari dengan menggunakan persamaan (21)

$$\Delta p = f \frac{l}{D} \frac{\rho V^2}{2} \qquad \text{…....(21)}$$

Persamaan (21) dapat dituliskan menjadi

$$f = \frac{\Delta p \dfrac{D}{l}}{\dfrac{\rho V^2}{2}} \qquad \text{…....(22)}$$

f : adalah faktor gesekan

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \qquad \text{…....(23)}$$

Untuk aliran laminar faktor gesekan (f) sama adalah

$$f = \frac{64}{Re} \qquad \text{…....(24)}$$

Hubungan penurunan tekanan dan tegangan geser

$$\Delta p = \frac{4/\tau_w}{D} \qquad \text{…....(25)}$$

Contoh :

Fluid mengalir pada sebuah pipa horizontal memiliki diamater 3 inchi seperti pada Gambar 1. Laju aliran ditentukan dengan cara mengukur tekanan dua titik pada pipa tersebut dengan jarak antar titik 6 feet, Jika laju aliran 0.5 ft^3/s dan temperatur fluida T = 100ºF Tentukan,

(a) Penurunan tekanan
(b) Rezim aliran
(c) Tegangan geser
(d) Gaya akibat tekanan
(e) Gaya akibat viskositas

Diketahui :

D = 3 inchi = 0,25 feet

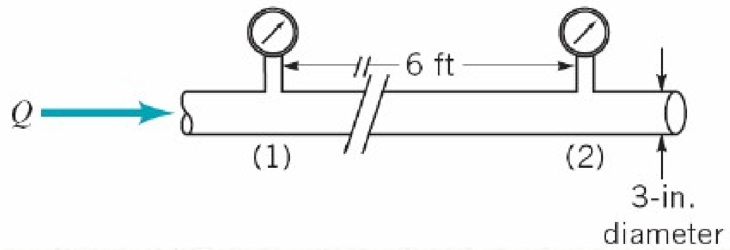
1 feet = 12 inchi

T = 100ºF

Q = 0,5 ft^3/s

l = 6 feet

Ditanya : Δp , Re, τ_w ,F_p, dan F_v



Gambar 1. Pipa saluran (munson dkk,2002)

Tabel 1. Viskositas fluida (munson dkk,2002)

T (°F)	ρ (slugs/ft^3)	μ (lb · s/ft^2)
60	2.07	4.0×10^{-2}
80	2.06	1.9×10^{-2}
100	2.05	3.8×10^{-3}
120	2.04	4.4×10^{-4}
140	2.03	9.2×10^{-5}
160	2.02	2.3×10^{-5}

Penyelesaian:

(a) Penurunan tekanan

$$Q = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu l}$$

$$\Delta p = \frac{128 \mu l Q}{\pi D^4}$$

Dari tabel 1, pada temperatur 100^{o}F diperoleh viskositas , $\mu = 3{,}8 \times 10^{-3}$ lb. s/ft^2

$$\Delta p = \frac{(128)(3{,}8 \times 10^{-3})(6)(0{,}5)}{\pi\,(0{,}25)^4}$$

$$\Delta p = 119 \ \ \text{lb/ft}^2$$

(b) Rezim aliran

$$R_e = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Dari tabel 1, pada temperatur 100°F diperoleh masa jenis , $\rho = 2{,}05$ slugs/ft^3

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{0{,}5}{\frac{\pi}{4}(0{,}25)^2}$$

$$V = 10{,}2 \quad \text{ft/s}$$

$$R_e = \frac{(2{,}05)(10{,}2)(0{,}25)}{3{,}8 \times 10^{-3}}$$

$$R_e = 1375 \quad (R_e < 2300)$$

Aliran laminar

$$f = \frac{64}{Re}$$

(c) Tegangan geser

$$\tau_w = \frac{\Delta p D}{4l}$$

$$\tau_w = \frac{(119)(0{,}25)}{(4)(6)}$$

$$\tau_w = 1{,}24 \;\; \text{lb/ft}^2$$

(d) Gaya akibat tekanan

$$F_P = \frac{\pi D^2}{4}\Delta p$$

$$F_P = \frac{\pi (0{,}25)^2}{4}(119)$$

$$F_P = 5{,}84 \;\; \text{lb}$$

(e) Gaya akibat viskositas

$$F_V = 2\pi \frac{D}{2} l \tau_w$$

$$F_V = (2)\pi \frac{0{,}25}{2}(6)(1{,}24)$$

$$F_V = 5{,}84 \;\; \text{lb}$$