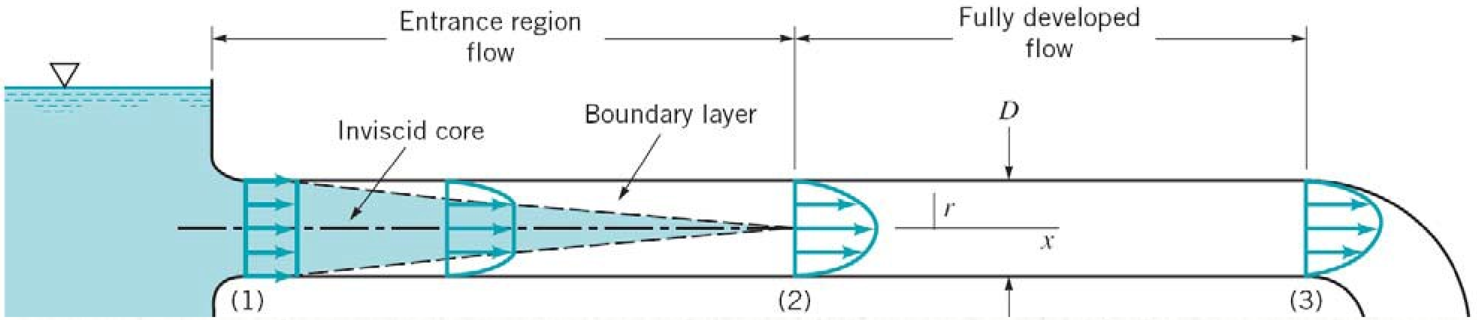
Aliran Laminar Berkembang Penuh

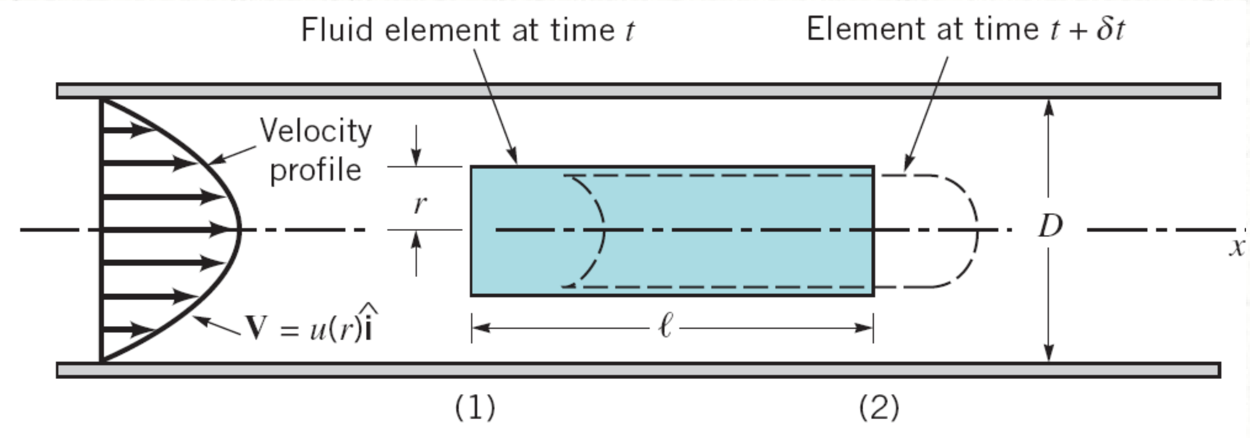
Lapisan batas (*boundary layer*) adalah daerah pada aliran yang mengalami pengaruh viskositas sedangkan aliran berkembang penuh (*fully depeloped flow*) adalah aliran fluida dimana lapisan batas telah memenuhi seluruh penampang pipa.



Gambar 1. Ilustrasi aliran berkembang penuh (munson,dkk 2002)

Gambar 1 mengilustrasikan aliran fluida dari sebuah reservoir mengalir masuk ke dalam pipa. Ketebalan lapisan batas mulai dari daerah masuk secara bertahap mengalami perubahan seiring dengan jarak lintasan fluida, yang pada akhirnya lapisan batas akan memenuhi seluruh panampang pipa.

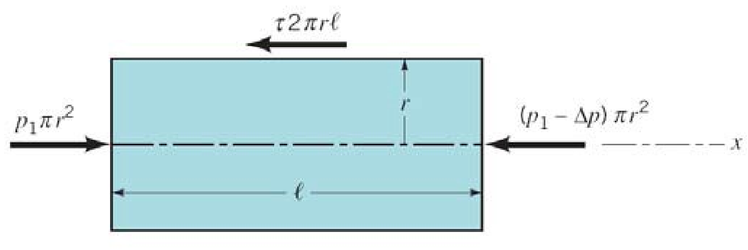
Analisis aliran laminar berkembang penuh dapat dilakukan dengan menggunaan persamaan Newton. Dengan menggunakan acuan gambar elemen fluida seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram benda bebas (munson,dkk 2002)

Asumsi yang digunakan pada Gambar 2 adalah:

- Aliran laminar, pipa lurus dan diameter konstan
- Elemen fluida berbentuk silinder, memiliki jari-jari r dan panjangnya ℓ



Gambar 3. Elemen fluida (munson dkk,2002)

Persamaan Newton II pada arah sumbu x diketahui sbb:

$$F_x = m\,a_x \qquad \text{........(1)}$$

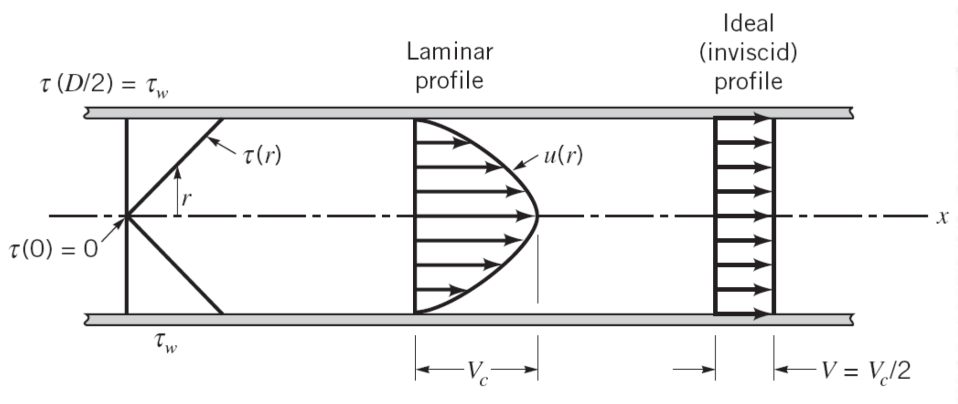
Pada kondisi kesetimbangan diketahui $\Sigma F_x = 0$ sehingga jumlah gaya pada arah x dengan menggunakan Gambar 3 dan persamaan (1) diperoleh:

$$p_1 \pi r^2 - (p - \Delta p)\pi r^2 - \tau\, l (2\pi r) = 0 \qquad \text{........(2)}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r} \qquad \text{........(3)}$$

Dengan menggunakan kondisi batas pada Gambar 4 dipeoleh :

$$\tau = \frac{2\tau_w r}{D} \qquad \text{........(4)}$$



Gambar 4. Kondisi batas (munson,dkk 2002)

Penurunan tekanan dapat dicari dengan cari subtitusi persamaan (4) ke persamaan (3) dan menghasilkan:

$$\Delta p = \frac{4 l \tau_w}{D} \qquad \text{........(5)}$$

Untuk aliran laminar, tegangan geser dinyatakan dengan persamaan (6).

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \qquad \text{........(6)}$$

Substitusi persamaan (3) ke persamaan (6) menghasilkan

$$\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu l}\right) r \qquad \text{........(7)}$$

$$\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \int r\, dr \qquad \text{........(8)}$$

Hasil integrasi persamaan (8) menghasilkan:

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu l}\right) r^2 + C_1 \qquad \text{........(9)}$$

Dengan menerapkan kondisi batas diperoleh distribusi kecepatan:

$$u(r) = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}\left[1 - \left(\frac{2\mathrm{r}}{D}\right)^2\right] \qquad \text{.......(10)}$$

$$u(r) = V_{avg}\left[1 - \left(\frac{2\mathrm{r}}{D}\right)^2\right] \qquad \text{.......(11)}$$

$$u(r)=\frac{\tau_w D}{4\mu}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad \text{.......(12)}$$

Distribusi tegangan geser:

$$\tau=-\mu\frac{du}{dr}=\frac{r\,\Delta p}{2l} \qquad \text{.......(13)}$$

Laju aliran volume:

$$Q=\int_0^R u(r)\,2\pi\,r\,dr=\frac{\pi R^4 V_c}{2} \qquad \text{.......(14)}$$

$$Q=\frac{\pi D^4\Delta p}{128\mu l} \qquad \text{.......(15)}$$

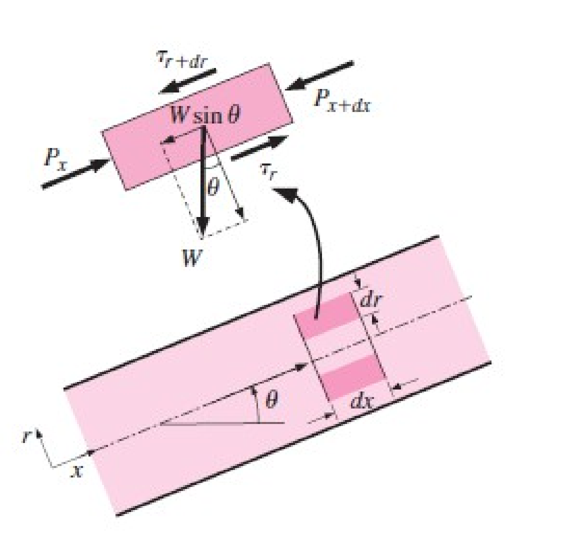
Kecepatan rata-rata:

$$V_{avg}=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{\pi R^2} \qquad \text{.......(16)}$$

Kecepatan maksimum: $$u_{max}=-\frac{R^2\Delta p}{4\mu l}=2V_{avg} \qquad \text{.......(17)}$$

Aliran pada Pipa Miring

Pada kenyataannya penggunaan pipa tidak hanya ditempatkan pada posisi vertikal atau horizontal saja. Tetapi untuk kebutuhan tertentu terkadang pipa harus dipasang dengan posisi miring. Analisis aliran pada pipa pada posisi miring dapat dilakukan dengan menggunakan Gambar 5.



Gambar 5. Pipa posisi miring (cengel dkk,2018)

Gambar 5 menunjukkan pipa yang ditempatkan pada posisi miring dengan sudut kemiringan sebesar θ terhadap bidang horizontal.

Prosedur analisis aliran pada pipa miring memiliki kemiripan dengan analisis pipa horizontal. Dari gambar 1 berat fluida pada arah aliran dapat dicari dengan persamaan:

$$W_x = W \sin\theta \qquad \text{........(18)}$$

$$W_x = \gamma\, V_{elemen} \sin\theta \qquad \text{........(19)}$$

$$W_x = \gamma\,(2\pi\, r\, dr\, dx)\sin\theta \qquad \text{........(20)}$$

θ = sudut kemiringan pipa dengan arah horizontal

$(2\pi\, r\, dr\, dx)$ = volume fluida

Kesetimbangan gaya pada gambar 1 searah aliran dapat dicari dengan menggunakan persamaan (21):

$$(2\pi\, r\, dr\, p)_x - (2\pi\, r\, dr\, p)_{x+dx} + (2\pi\, r\, dx\, \tau)_r$$

$$-(2\pi\, r\, dx\, \tau)_{r+dr} - \gamma\,(2\pi\, r\, dr\, dx)\sin\theta = 0 \qquad \text{........(21)}$$

Menghasilkan persamaan diferensial:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{dp}{dx}+\gamma\sin\theta \qquad \text{........(22)}$$

Integrasi persamaan menghasilkan:

$$u(r)=-\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{dp}{dx}+\gamma\sin\theta\right)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \text{........(23)}$$

Dengan melakukan prosedur yang sama seperti pipa horizontal, kecepatan rata-rata pada aliran pipa posisi miring dapat dicari dengan persamaan (24):

$$V_{avg}=\frac{(\Delta p-\gamma l\sin\theta)D^2}{32\mu l} \qquad \text{........(24)}$$

Laju aliran pada aliran pipa posisi miring dapat dicari dengan persamaan (25):

$$Q=\frac{(\Delta p-\gamma l\sin\theta)\pi D^4}{128\mu l} \qquad \text{........(25)}$$

Contoh 1:

Minyak pada 20 ºC memiliki berat 8711,28 N/m^3 dan kekentalan 0.8 kg/m.s mengalir secara *steady state* melalui pipa diamater 5 cm dan panjang 40 m. Tekanan pada sisi masuk dan keluar pipa masing-masing 745 kPa dan 97 kPa. Tentukan lalu aliran pada pipa jika posisinya :

(a) Pipa horizontal

(b) Pipa mendaki dengan sudut θ =15 ºC

(c) Pipa menurun dengan sudut θ = -15 ºC

(d) Rezim aliran pada pipa

Diketahui :

D = 5 cm = 0,05 m

γ= 8711,28 N/m^3

μ= 0.8 kg/m.s

P_1 = 745 kPa , P_2 = 97 kPa

l = 40 m

Perbedaan tekanan antara kedua ujung pipa:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 745 - 97 = 648 \text{ kPa} = 648000 \text{ Pa}$$

$$A_c = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi\, 0{,}05^2}{4} = 0{,}001963 \text{ m}^2$$

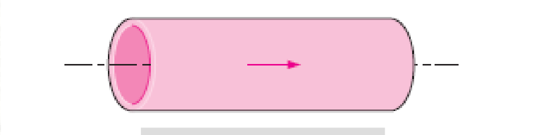
(a) Laju aliran pada pipa horizontal :

$$Q=\frac{(\Delta p-\gamma l\sin\theta)\pi D^4}{128\mu l}$$

$$Q=\frac{\Delta p\pi D^4}{128\mu l}$$

$$Q=\frac{(648000)\pi(0{,}05)^4}{(128)(0{,}8)(40)}$$

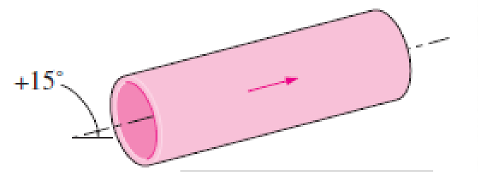
$$Q=0{,}0031\ \text{m}^3/\text{s}$$



pipa horizontal
(cengel dkk, 2018)

(b) Laju aliran pada pipa posisi mendaki :

$$Q=\frac{(\Delta p-\gamma l\sin\theta)\pi D^4}{128\mu l}$$

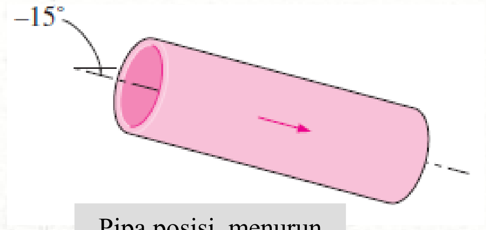


pipa posisi mendaki
(cengl dkk,2018)

$$Q=\frac{[648000-(8711{,}28)(40)(\sin 15°)]\pi(0{,}05)^4}{(128)(0{,}8)(40)}$$

$$Q=0{,}00267\ \text{m}^3/\text{s}$$

(c) Laju aliran pada pipa menurun :



Pipa posisi menurun
(cengel dkk,2018)

$$Q=\frac{(\Delta p-\gamma l \sin\theta)\pi D^4}{128\mu l}$$

$$Q=\frac{(648000-(8711{,}28)(40)(\sin(-15°)))\pi(0{,}05)^4}{128(0{,}8)(40)}$$

$$Q=0{,}00354 \quad \mathrm{m^3/s}$$

(d) Rezim aliran :

$$V_{avg}=\frac{Q}{A_c}=\frac{0{,}00354}{0{,}001963}=1.80 \quad \mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{R_e}=\frac{\rho\,\mathrm{V_{avg}}\,\mathrm{D}}{\mu} \Rightarrow \rho=\frac{\gamma}{\mathrm{g}} \Rightarrow \mathrm{g}=9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\mathrm{R_e}=\frac{(888)(1{,}80)(0{,}05)}{0{,}8}$$

$$\mathrm{R_e}=100 \quad (\mathrm{R_e}<2300 \ \text{aliran laminar})$$