Analisis Dimensional

- Analisis dimensi adalah metode matematika yang penting dalam studi mekanika fluida. Analisis dimensi adalah teknik matematika, yang memanfaatkan studi dimensi sebagai sebagai alat bantu untuk solusi berbagai masalah teknik.

- Keuntungan utama dari analisis dimensi adalah dapat mengurangi jumlah variabel dalam masalah dengan cara menggabungkan variabel dimensi untuk membentuk parameter non-dimensi.

- Sebagian besar masalah dalam mekanika fluida sedemikian kompleks. fenomena bahwa solusi matematika langsung terbatas pada beberapa kasus khusus.

- Analisis dimensi dapat digunakan dalam memperoleh hubungan fungsional di antara berbagai variabel yang terlibat dalam hal parameter non-dimensi.

- Pada pembahasan mekanika fluida dijumpai besaran-besaran seperti panjang, waktu, kecepatan, percepatan, gaya, massa, momentum, energi, viskositas, dan besaran yang lainnya.

- Dimensi pokok dalam mekanika adalah panjang [L], waktu [T], massa [M]. Misalkan persamaan ke Newton II, F = ma.

Secara dimensional persamaan Newton II dapat di tuliskan menjadi :

$$[F] = \left[\frac{ML}{T^2}\right]$$

Persamaan dapat dituliskan menjadi :

$$\left[\frac{FT^2}{ML}\right] = 1$$

Tabel 1. Besaran-besaran yang sering digunakan dalam mekanika fluida

Entity	MLT System	FLT System
Length (L)	L	L
Area (A)	L^2	L^2
Volume (V)	L^3	L^3
Time (t)	T	T
Velocity (v)	LT^{-1}	LT^{-1}
Acceleration (a)	LT^{-2}	LT^{-2}
Force (F) and weight (W)	MLT^{-2}	F
Specific weight (γ)	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
Mass (m)	M	$FL^{-1}T^{-2}$
Specific mass (ρ)	ML^{-3}	$FL^{-4}T^{2}$
Pressure (p) and stress (τ)	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
Energy (E) and work	$ML^{2}T^{-2}$	FL
Momentum (mv)	MLT^{-1}	FT
Power (P)	$ML^{2}T^{-3}$	FLT^{-1}
Dynamic viscosity (μ)	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-2}T$
Kinematic viscosity (υ)	$L^{2}T^{-1}$	$L^{2}T^{-1}$

Prosedur analisis dimensi dapat dipelajari dengan menggukakan contoh saat pada slide berikutnya.

Contoh 1 :
Misalkan persoalan sebuah benda jatuh bebas dari ketinggian tertentu ke permukaan bumi . Jika diketahui X : tinggi awal benda, W : berat benda , t : waktu, dan g : percepatan gravitasi, tentukan hubungan bahwa ketinggian adalah fungsi dari berat, percepatan gravitasi dan waktu.

Dengan menggunakan besaran gaya F, panjang L dan waktu T. selanjutnya dibuat besaran fisik $A_0 = X$, $A_1 = W$, $A_2 = g$ dan $A_3 = t$.

Menentukan variabel terikat dan bebas

Variabel terikat A_0 dan variabel bebas adalah A_1,A_2 dan A_3 , diperoleh

$$A_0 = F(A_1, A_2, A_3)$$

$$A_0 = kA_1^{y_1} A_2^{y_2} A_3^{y_3}$$

k = konstanta tanpa dimensi

Persamaan ditulis menjadi

$$X = F(W, g, t)$$

$$X = kW^{y_1} g^{y_2} t^{y_3}$$

$$[X] = [W]^{y_1} [g]^{y_2} [t]^{y_3}$$

$$[X]=[W]^{y_1}[g]^{y_2}[t]^{y_3}$$

Jika W, g ,dan t diganti dengan unit dimensi dari tabel 1, persamaan menjadi

$$F^0 L^1 T^0 = (F)^{y_1} (L T^{-2})^{y_2} (T)^{y_3}$$

$$F^0 L^1 T^0 = F^{y_1} L^{y_2} T^{-2y_2+y_3}$$

Pangkat variabel F sebelah kiri sama dengan 0 dan pangkat variabel F sebelah kanan sama dengan y_1.

$$F: 0 = y_1 \longrightarrow y_1 = 0$$

Pangkat variabel L sebelah kiri sama dengan 1 dan pangkat variabel L sebelah kanan sama dengan y_2.

$$L: 1 = y_2 \longrightarrow y_2 = 1$$

Pangkat variabel T sebelah kiri sama dengan 0 dan pangkat variabel T sebelah kanan sama dengan $-2y_1 + y_3$.

$$T: 0 = -2y_2 + y_3 \longrightarrow y_3 = 2$$

Subtitusi nilai y_1 , y_2 dan y_3 ke persamaan

$$X = kW^{y_1} g^{y_2} t^{y_3} \longrightarrow X = kW^0 g^1 t^2$$

$$X = kgt^2$$

Teorema Phi Buchingham

Merupakan teori yang digunakan untuk menentukan kelompok bilangan tanpa dimensi. Prosedur Teorema Phi Buchingham secara singkat adalah sebagai berikut :

1. Tentukan jumlah variabel yang diberikan
2. Tentukan jumlah konstanta tak berdimensi
3. Tentukan variabel berulang
4. Menentukan pangkat variabel

Penggunaan prosedur di atas ditunjukkan seperti pada contoh 2 sebagai berikut:

Contoh 2:
Gaya drag (F) benda bulat yang dialiri oleh fluida dipengaruhi diamater (D), viskositas fluida (μ) masa jenis fluida (ρ) dan kecepatan fluida (V). Gunakan teori Phi Buchingham yang menunjukkan bahwa gaya drag merupakan fungsi dari variabel yang sudah disebutkan.

Penyelesaian:
Secara matematis, gaya drag dinyatakan dengan persamaan :

$$F=\phi(D, V, \rho, \mu)$$

1. Jumlah variabel yang terlibat :

$$(F, D, V, \rho, \mu) = 5 \text{ buah}$$

Dimensi pokok L, M, T : = 3 buah

2. Jumlah konstanta tak berdimensi:

Jumlah variabel – dimensi pokok = 5 – 3 = 2 buah

3. Variabel berulang D, V, dan ρ :

$$\pi_1 = D^{a1} V^{b1} \rho^{c1} F$$

$$\pi_2 = D^{a2} V^{b2} \rho^{c2} \mu$$

4. Penentuan pangkat variabel :

Analisis μ_1

$$\pi_1 = D^{a1} V^{b1} \rho^{c1} F$$

Dari tabel 1 dipeoleh:

$$L^0 M^0 T^0 = [L]^{a1} [L.T^{-1}]^{b1} [M.L^{-3}]^{c1} [M.L.T^{-2}]$$

Pangkat variabel L $\longrightarrow$ 0 = a1 + b1 - 3c1 + 1
Pangkat variabel M $\longrightarrow$ 0 = c1 + 1 maka c1 = -1
Pangkat variabel T $\longrightarrow$ 0 = - b1 -2 diperoleh b1 = -2 dan a1 = -2

$$\pi_1 = F\left(D^{-2} V^{-2} \rho^{-1}\right)$$

$$\pi_1 = \frac{F}{\left(D^2 V^2 \rho\right)}$$

Analisis μ_2

$$\pi_2 = D^{a2} V^{b2} \rho^{c2} \mu$$

Dari tabel 1 dipeoleh:

$$L^0 M^0 T^0 = [L]^{a2} [L.T^{-1}]^{b2} [M.L^{-3}]^{c2} [M.L^{-1}.T^{-1}]$$

Pangkat variabel L $\longrightarrow$ 0 = a2 + b2 - 3c2 - 1
Pangkat variabel M $\longrightarrow$ 0 = c2 + 1 maka c2 = -1
Pangkat variabel T $\longrightarrow$ 0 = - b2 -1 diperoleh b2 = -1 dan a2 = -1

$$\pi_2 = \mu \left(D^{-1} V^{-1} \rho^{-1} \right)$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{(D V \rho)}$$

Hubungan antara π_1 dan π_2 dinyatakan sebagai berikut:

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

$$\frac{F}{(D^2 V^2 \rho)} = f\left(\frac{\mu}{DV\rho}\right)$$

$$F = (D^2 V^2 \rho) f\left(\frac{\mu}{DV\rho}\right)$$

$$F = (D^2 V^2 \rho) \phi\left(\frac{\mu}{DV\rho}\right)$$

$$F = (D^2 V^2 \rho) \phi(R_e)$$

ϕ = tanda transformasi